Plancherel formula for line bundles on Hermitian symmetric spaces

示野, 信一

数理解析研究所講究録
826 巻 1993 年 42-54

Plancherel formula for line bundles on Hermitian symmetric spaces

東大数理 示野 信一 (Nobukazu Shimeno)

§ 1 Introduction

$\boxed{\text{目標}}$ 非コンパクト型のリーマン対称空間の Plancherel 公式 (Harish-Chandra の球函数による理論) を non-trivial line bundle の場合に一般化する。

__Notations__

G: connected non-compact real semisimple Lie group with finite center

K: a maximal compact subgroup of G

$G=KAN$: Iwasawa decomposition of G

$\mathfrak{g}.\mathfrak{k}.\mathfrak{a}.\mathfrak{n}$: $G.K.A.N$ に対応する Lie algebra

$g\in G$ に対して. $g\in k(g)\exp H(g)N$ $(k(g)\in K, H(g)\in\mathfrak{a})$ とする。

$\mathfrak{a}^*$: $\mathfrak{a}$ の dual

$\mathfrak{g}_\alpha := \{X\in\mathfrak{g} : [H.X]=\alpha(H)X \quad \text{for } {}^\forall H\in\mathfrak{a}\}$ $(\alpha\in\mathfrak{a}^*)$

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 0\}$: restricted root 系

$\Sigma^+ \subset \Sigma$: $\mathfrak{n}$ に対応する positive system

W : Σ の Weyl群

$m_\alpha := \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\alpha$

$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \ \in \mathfrak{a}^*$

$\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$: Σ^+ に対応する positive Weyl chamber

$A^+ := \exp \mathfrak{a}^+$

$\mathfrak{a}^*_+ := \{ \lambda \in \mathfrak{a}^* : \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \text{for } {}^\forall \alpha \in \Sigma^+ \}$

G/K は、Riemannian symmetric space of non-compact type と呼ばれ、次の様な例がある。

<u>Ex.1</u> $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ $\quad \left(\mathfrak{a} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

<u>Ex.2</u> $Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$ $\quad (\dim \mathfrak{a} = 2)$

Harish-Chandra の理論の復習

- 球函数

$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \ (= \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ に対して

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))} dk \qquad (g \in G)$$

dk は K 上の normalized Haar measure

を球函数と呼ぶ。球函数は、次の3つの性質で特徴付けられる。

$$\begin{cases} \circ\ \text{両側 } K\text{-不変} \\ \circ\ G/K \text{ 上の不変微分作用素の固有値 } \chi_\lambda \text{ の同時固有函数} \\ \circ\ \phi_\lambda(e) = 1 \end{cases}$$

<u>Lemma</u> $\phi_\lambda = \phi_\mu \iff \lambda \in W \cdot \mu$

Ex 1. の場合、$\phi_\lambda|_A$ は Gauss の超幾何函数で表せる。

∘ Harish-Chandra series

λ: generic の時、A^+ 上

$$\phi_\lambda = \sum_{w \in W} c(w\lambda)\, \Phi_{w\lambda}$$

と展開できる。ここで、$c(\lambda)$ は Harish-Chandra の c-函数と呼ばれるもので Γ 函数の積、商で具体的に書ける。また、Φ_λ は A^+ 上定義される不変微分作用素の動径成分の固有函数で、$\Phi_\lambda \sim a^{\lambda-\rho}$ $(a \to \infty \text{ in } A^+)$ という漸近挙動を持つものである。この展開を ϕ_λ の Harish-Chandra series と呼ぶ。

Ex. 1 の場合、$\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \ni \lambda \mapsto \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C}$ により、$\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ と $\mathbb{C}$ を同一視すると、超幾何函数の接続公式で、H-C series は

$$c(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}$$

となる。

∘ Harish-Chandra 変換

$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して

$$\hat{f}(\lambda) := \int_G f(g)\,\phi_{-\lambda}(g)\,dg$$

(dg: G上の Haar measure を適当に normalize したもの)

と定義し、これを f の Harish-Chandra 変換と呼ぶ。この逆変換は次で与えられる。

Theorem (Harish-Chandra)

$$f(g) = \frac{1}{|W|}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f}(\lambda)\,\phi_\lambda(g)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$$

§2 Harish-Chandra 変換の一般化とその Inversion formula (1-st form)

Gに次の仮定をつける。

$\boxed{\text{仮定}}$ Gは simple, connected Lie group で、G/Kは Hermitian symmetric space ($\Rightarrow$ Kは1次元の centerをもつ)。Gの center を $Z(G)$と書く。

この時、τをKの1次元表現 ($\tau: K \to \mathbb{C}^\times$, alg. hom.) とすれば、$\tau$は τ_ℓ ($\ell \in \mathbb{Z}$) と parametrize される。

Ex.1、Ex.2 は共に上の仮定を満たし、Kの1次元表現は、次の様になる。

Ex.1の場合　$K = SO(2) \ni \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \overset{\tau_\ell}{\longmapsto} e^{i\ell\theta} \in \mathbb{C}^\times$

Ex.2の場合　$K = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} : u \in U(2) \right\} \ni \begin{bmatrix} u & \\ & \bar{u} \end{bmatrix} \overset{\tau_\ell}{\longmapsto} (\det u)^\ell \in \mathbb{C}^\times$

更に、Gが simply connected と仮定する。

(Ex.1 では、$G=\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ (universal cover), $K=\mathbb{R}$
となる。)

すると、parameter ℓ は $\mathbb{R}$ (unitary), 又は $\mathbb{C}$ (non-unitary) にまでのびる。

こうする理由は

1° 連続parameter は離散parameter より一般的

2° 解析をするので parameter は連続な方がよい

◦ type $\tau_{-\ell}$ の球函数

まず、Harish-Chandra の球函数の一般化として、type $\tau_{-\ell}$ の球函数を次で定義する。

$$\Phi_{\lambda,\ell}(g) := \int_{K/Z(G)} \tau_\ell(k^{-1}k(g^{-1}k))\, e^{-(\lambda+\rho)(H(g^{-1}k))}\, dk \quad (g\in G)$$

$$\lambda\in\mathfrak{a}_c^*,\ \ell\in\mathbb{C}$$

これは、次の3つの性質で特徴付けられる。

- ◦ $\Phi_{\lambda,\ell}(k_1 g k_2) = \tau_\ell(k_1 k_2)^{-1}\Phi_{\lambda,\ell}(g)$ $(k_1,k_2\in K,\ g\in G)$
- ◦ G/K の τ_ℓ に同伴した line bundle 上の不変微分作用素の固有値 $\chi_{\lambda,\ell}$ の同時固有函数
- ◦ $\Phi_{\lambda,\ell}(e)=1$

<u>Lemma</u> $\Phi_{\lambda,\ell}=\Phi_{\mu,\ell} \iff \lambda\in W\cdot\mu$

$\Phi_{\lambda,0}=\Phi_\lambda$ が成り立つ。

Ex.1 の場合、$\Phi_{\lambda,\ell}|_A$ はやはり Gauss の超幾何函数で表せる。

◦ Harish-Chandra series

$\Phi_{\lambda,\ell}$ についても Harish-Chandra series が得られて次の様になる。

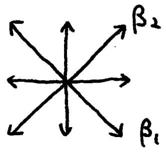
λ: generic な時、A^+ 上

$$\Phi_{\lambda,\ell} = \sum_{w \in W} c(w\lambda,\ell)\, \Phi_{w\lambda,\ell}$$

$$\left\{\begin{array}{l} c(\lambda,\ell) : c\text{-函数}(\text{具体的に計算できる}) \\ \qquad c(\lambda,0) = c(\lambda) \ (\text{Harish-Chandra の } c\text{-函数}) \\ \Phi_{\lambda,\ell} : \text{不変微分作用素の動径成分の固有函数} \\ \qquad \Phi_{\lambda,\ell} \sim a^{\lambda-\rho} \quad (a \to \infty \ \text{in } A^+) \end{array}\right.$$

<u>Ex.1 の場合</u> $\quad c(\lambda,\ell) = \dfrac{2^{1-\lambda}\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1+\ell))\,\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda+1-\ell))}$

<u>Ex.2 の場合</u> $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ に対して、$\Sigma^+ = \{\beta_1, \beta_2, \frac{1}{2}(\beta_2 \pm \beta_1)\}$ とする。



$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda = \frac{x}{2}\beta_1 + \frac{y}{2}\beta_2 \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{C}^2$ によって

$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathbb{C}^2$ を同一視すると、

$$\left\{\begin{array}{l} c_1(z) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}z)}{\Gamma(\frac{1}{2}(z+1))} \\ c_2(z,\ell) = \dfrac{2^{1-z}\,\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}(z+1+\ell))\,\Gamma(\frac{1}{2}(z+1-\ell))} \end{array}\right.$$

として、

$$c(\lambda,\ell) = c_1(x+y)\,c_1(y-x)\,c_2(x,\ell)\,c_2(y,\ell)$$

と書ける。

・Harish-Chandra 変換

$$\mathcal{D}_\ell(G) := \{ f \in C^\infty(G) : f(k_1 g k_2) = \tau_\ell(k_1 k_2)^{-1} f(g),\ k_1, k_2 \in K,\ g \in G$$
$$f \text{ は modulo } Z(G) \text{ で compact support} \}$$

とおき、$f \in \mathcal{D}_\ell(G)$ に対して

$$f_\ell^\wedge(\lambda) := \int_{G/Z(G)} f(g)\,\Phi_{-\lambda,-\ell}(g)\,dg$$

(dg：適当に normalize した Haar measure)

と定める。

問題　$f \longmapsto f_\ell^\wedge(\lambda)$ の逆変換を具体的に求めよ。

以下、この問題を考察する。

$c(\lambda, \ell)$ を具体的に書いてみると

(☆) $\left\{ {}^\exists \eta \in -\mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}_+^*)\ \text{s.t.}\ c(-\lambda, \ell)^{-1} \text{ が } \mathrm{Re}\,\lambda \in \eta - \mathcal{C}\ell(\mathfrak{a}_+^*) \text{ で pole を持たない。} \right.$

が分かる。例えば、Ex. 1 では　$\eta < -|\mathrm{Re}\,\ell| + 1$ とすればよい。

Lemma　一般に $|\mathrm{Re}\,\ell|$ が十分小さければ $\eta = 0$ としてよい。

…(＊)

Theorem A.（Inversion formula, 1st form）

$$f(a) = \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^* + \eta} f_\ell^\wedge(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda, \ell)^{-1}\,d\lambda \qquad (a \in A^+)$$

右辺は (☆) を満たす η の取り方に依らぬ。

Remark　(＊)が成り立つ場合、$\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ が Weyl 群不変だから、変数変換と Harish-Chandra 展開により、上の式は

$$f(a) = \frac{1}{|W|} \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} f_\ell^\wedge(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(\lambda, \ell)^{-1} c(-\lambda, \ell)^{-1}\,d\lambda$$

となって定義域をG上にのばせる。

Th.A の証明の方針

1°) $\ell\in\mathbb{R}$, $|\ell|$ が十分小の時は、$\ell=0$ の時の Rosenberg の証明 ([1]) が一般化できる。

2°) ℓ:一般の時は、statement の右辺が ℓ に holomorphic に depend することを示して、解析接続する。

§3 Inversion formula (2nd form)

以下、$\ell\in\mathbb{R}$ とする。Th.A の積分路を $\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ から $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ に移動して、留数を計算し、それらを $\Phi_{\lambda,\ell}$ を用いて表す。積分路の移動の際に必要な、被積分函数の無限遠 (Im λ に関して) の近傍での評価は出来るが、ここでは省略する。以下では、Ex.1 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$)、Ex.2 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$) の場合を説明するが、その議論は、一般の場合にも通用する。

<u>Ex.1 の場合</u>

§2で書いた $c(\lambda,\ell)$ の形から、$c(-\lambda,\ell)^{-1}$ の Re $\lambda\le 0$ における poles の集合は、

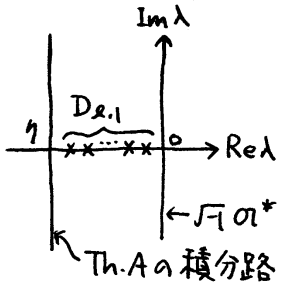
$D_{\ell,1}:=\{x=-|\ell|+1+2j : j\in\mathbb{N},\ x<0\}$　　但し、$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

となることが分かる。特に、$|\ell|\le 1$ ならば、$c(-\lambda,\ell)^{-1}$ は Re $\lambda\le 0$ において regular。

<u>Theorem B</u> (Ex. 1の場合)

$$f(g) = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda)\,\phi_{\lambda,\ell}(g)\,|c(\lambda,\ell)|^{-2}\,d\lambda$$
$$+ \sum_{x\in D_{\ell,1}} (-2\pi\sqrt{-1})\,\hat{f}_\ell(x)\,\phi_{x,\ell}(g)\,\operatorname*{Res}_{\lambda=x}\left[c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\right],$$
$$(g\in G)$$

proof) $\mathfrak{a}_c^* \simeq \mathbb{C}$ と同一視する。



$\hat{f}_\ell(\lambda)$はλについてholomorphic、$\Phi_{\lambda,\ell}$は$\mathrm{Re}\,\lambda\leq 0$でregularなので、Th.Aの被積分函数 $\hat{f}_\ell(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}\,c(-\lambda,\ell)^{-1}$ のpossible polesの集合は、$D_{\ell,1}$(高々一位)。そこで、Th.Aの式は次の様になる。

$$f(a) = \int_{\eta+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}\,d\lambda$$
$$= \int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f}_\ell(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}\,d\lambda$$
$$+ \sum_{x\in D_{\ell,1}} (-2\pi\sqrt{-1})\operatorname*{Res}_{\lambda=x}\left\{\hat{f}_\ell(\lambda)\,\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,c(-\lambda,\ell)^{-1}\right\}$$

右辺第1項はTh.AのRem.と同様に$\phi_{\lambda,\ell}$で書ける。また、$\lambda\notin\mathbb{Z}$の時、A^+上 $\phi_{\lambda,\ell} = c(\lambda,\ell)\Phi_{\lambda,\ell} + c(-\lambda,\ell)\Phi_{-\lambda,\ell}$

であり(Harish-Chandra series)、ℓ:genericなら$D_{\ell,1}\cap\mathbb{Z}=\phi$で、$x\in D_{\ell,1}$に対して $c(-x,\ell)=0$ だから、

$$\phi_{x,\ell} = c(x,\ell)\,\Phi_{x,\ell}$$

$\phi_{x,\ell}$はℓについてholomorphicだから解析接続によって、この式は任意のℓで成立。これを用いて上の式の右辺第2項も$\phi_{\lambda,\ell}$で書ける。

$$\therefore\ f(a) = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}} \hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(a)|c(\lambda,\ell)|^{-2}d\lambda + \sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\hat{f_\ell}(x)\phi_{x,\ell}(a)\operatorname*{Res}_{\lambda=x}\{c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\} \quad (a\in A^+)$$

$G=K\overline{A^+}K$ により、G上にのぼせる。■

<u>Theorem C</u> (Ex.1 の場合)

$$|\phi_{\lambda,\ell}|\in L^2(G/Z(G)) \iff \lambda\in D_{\ell,1} \text{ or } -\lambda\in D_{\ell,1}$$

この時、対応する $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の relative discrete series の lowest K-type は $(|\lambda|-1)\,\mathrm{sgn}\,\ell$。

<u>Ex.2 の場合</u>

$D_{\ell,2}:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+|\ell|-1\in 2\mathbb{N},\ y-x-1\in 2\mathbb{N},\ y<0\}$ とおく。

<u>Theorem B</u> (Ex.2 の場合)

$$f(g) = \frac{1}{8}\int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g)|c(\lambda,\ell)|^{-2}d\lambda + \frac{1}{2}\sum_{x\in D_{\ell,1}}(-2\pi\sqrt{-1})\operatorname*{Res}_{z=x}(c_2(z,\ell)^{-1}c_2(-z,\ell)^{-1}) \times\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}}\hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g)|c_1(x+y)c_1(y-x)c_2(y,\ell)|^{-2}dy + \sum_{(x,y)\in D_{\ell,2}}(-2\pi\sqrt{-1})^2\operatorname*{Res}_{y}\operatorname*{Res}_{x}\{c(\lambda,\ell)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\}\hat{f_\ell}(\lambda)\phi_{\lambda,\ell}(g) \quad (g\in G)$$

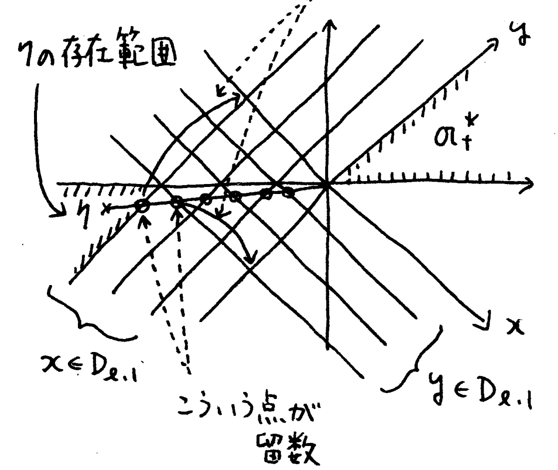
<u>Theorem C</u> (Ex.2の場合)

$$|\phi_{\lambda,\ell}|\in L^2(G/Z(G)) \iff {}^{\exists}\mu\in W\cdot\lambda \text{ s.t. } \mu\in D_{\ell,2}$$

対応する relative discrete series は holomorphic d.s.

(lowest K-type は1次元とは限らない)

proof of Th. B) 留数の計算において、更に積分路を移動する(ここでも留数が出る)



← $\lambda=(x,y)$ の実での切り口。

η を $x=y$ という hyperplane の十分近くにとると、留数定理より、

$$\int_{\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,C(-\lambda,\ell)^{-1}d\lambda - \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,C(-\lambda,\ell)^{-1}d\lambda$$
$$=(-2\pi\sqrt{-1})\sum_{z\in D_{\ell,1}}\Big\{\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z}\left(\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,C(-\lambda,\ell)^{-1}\right)dy + \int_{(z+z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{y=z}\left(\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,C(-\lambda,\ell)^{-1}\right)dx\Big\} \cdots (1)$$

右辺の2番目の積分は、変数変換により

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z}\left(\hat{f_\ell}(\bar{\lambda})\Phi_{\bar{\lambda},\ell}(a)\,C(-\bar{\lambda},\ell)^{-1}\right)dy$$

となる(但し、$\lambda=(x,y)$ に対して $\bar{\lambda}=(y,x)$)。この式と、$\hat{f_\ell}$ の W-invariance、$\bar{\lambda}\in W\cdot\lambda$ を用いて、(1)の右辺の Σ の中身は

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\left\{\Phi_{\lambda,\ell}(a)\,C(-\lambda,\ell)^{-1}+\Phi_{\bar{\lambda},\ell}(a)\,C(-\bar{\lambda},\ell)^{-1}\right\}dy \cdots (2)$$

となる。ここで、$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)$ とおいて、

$$\Phi^{(\alpha_1)}_{\lambda,\ell}(a) := c_1(y-x)\Phi_{\lambda,\ell}(a) + c_1(x-y)\Phi_{\bar{\lambda},\ell}(a)$$

とおく。これは、$\mathrm{Re}\,x\le 0$, $\mathrm{Re}\,y\le 0$ で pole をもたない。また、$x+y, x, y\notin\mathbb{Z}$ の時、$c^{(\alpha_1)}(\lambda) := C(\lambda,\ell)\,c_1(y-x)^{-1}$ とおくと

$$\phi_{\lambda,\ell} = \sum_{\overline{w} \in \{1, s_{\alpha_1}\}\backslash W} c^{\{\alpha_1\}}(w\lambda)\,\Phi^{\{\alpha_1\}}_{w\lambda,\ell}$$

と展開される(Harish-Chandra 展開)。

$c(\lambda,\ell) = c_1(y-x)\,c_1(y+x)\,c_2(x,\ell)\,c_2(y,\ell)$ だったので、(2)は

$$\int_{(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}dy \quad \cdots (3)$$

となる。この積分の積分路を $0 \geq \mathrm{Re}\,y \geq \mathrm{Re}\,x$ 内で、$(z,z)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$ (正確には、$(z,z)+\{0\}\times\sqrt{-1}\mathbb{R}$) から、$(z,0)+\sqrt{-1}\mathbb{R}$ に動かす。$\hat{f_\ell}(\lambda)\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)$ は $\mathrm{Re}\,x \leq 0$, $\mathrm{Re}\,y \leq 0$ で holomorphic であり、$\operatorname*{Res}_{x=z} c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}$ の $\mathrm{Re}\,y \geq z$ における poles は $(z,y) \in D_{\ell,2}$ となる y。したがって留数定理により、(3)は

$$\int_{(z,0)+\sqrt{-1}\mathbb{R}} \operatorname*{Res}_{x=z} \hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}dy$$
$$+ \sum_{(z,w)\in D_{\ell,2}} (-2\pi\sqrt{-1}) \operatorname*{Res}_{y=w} \operatorname*{Res}_{x=z} \left(\hat{f_\ell}(\lambda)\,\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}(a)\,c_1(y-x)^{-1}c(-\lambda,\ell)^{-1}\right)$$

となるが、これらは、$\Phi^{\{\alpha_1\}}_{\lambda,\ell}$ による展開を使って、Ex.1の場合と同様の議論(ℓ に関する解析接続と変数変換)により、$\phi_{\lambda,\ell}$ で表せる。∎

References

1. S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.

2. N. Shimeno, Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 37 (1990) 201–234

3. ———, The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type, preprint